Série d'exercices n°1

Solution de l'exercice 1

1. La masse, le volume et le nombre de moles sont des grandeurs extensives, puisque leur valeur double si le système considéré double de taille. En revanche, la pression, la densité, la masse molaire, la température et la concentration sont des grandeurs intensives.
2. Le rapport de deux grandeurs extensives est une grandeur intensive. On peut citer comme exemple la densité, qui est le rapport d'une masse sur un volume. La masse molaire est également définie comme le rapport de deux grandeurs extensives, à savoir la masse et le nombre de moles.

Solution de l'exercice 2

a. $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 6xy + 2z$

b. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 + 6y$

c. $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 6x$

d. $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 6x$. Il s'agit de la même formule que $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$. Ce résultat est en fait vrai pour n'importe quelle fonction différentiable : l'ordre dans lequel sont appliquées les dérivées n'importe pas.

Solution de l'exercice 3

1. a. $pV = nRT \Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,n} = \frac{nR}{V}$

   b. $\left(p + n^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,n} = \frac{nR}{V - nb}$
2. Il faut calculer les dérivées partielles nécessaires. On obtient :

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,n} = \frac{1}{V}\left(\frac{nR}{p}\right) = \frac{1}{T}$$

et

$$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n} = -\frac{1}{V}\left(-\frac{nRT}{p^2}\right) = \frac{1}{p}$$

Solution de l'exercice 4

N°	Pression [Pa]	Température [K]	Volume [m^3]
1	10^5	298	1
2	10^8	298	0,996
3	10^5	1000	1,14
4	10^8	600	1,06

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

1-2	isotherme	$\partial V = -\kappa V \partial p$	$dV = -4 \times 10^{-3}$	0.996
1-3	isobare	$\partial V = \alpha V \partial T$	$dV = 1.4 \times 10^{-1}$	1.14
2-4	isobare	$\partial V = \alpha V \partial T$	$dV = 6 \times 10^{-2}$	1.06

Solution de l'exercice 5

1. L'équation donnant la masse $m = \rho V =$ const implique que, par définition et en différentiant :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}V}{V} = 0.$$

$$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

On obtient :

$$\mathrm{d}p = -\frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}. \tag{1}$$

2. En intégrant l'équation (1), on obtient :

$$p = \frac{1}{\kappa}\ln\rho + \text{const},$$

d'où

$$p - p_0 = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right),$$

et

$$\rho = \rho_0 \exp\big(\kappa(p - p_0)\big).$$

La variation relative de masse volumique du mercure lorsque la pression varie de 50 bar est :

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \exp\big(\kappa(p - p_0)\big) - 1 \approx \kappa(p - p_0) = 1.3 \cdot 10^{-4}.$$

Solution de l'exercice 6

1. La masse d'eau m dans le barrage se calcule en multipliant le volume de la retenue d'eau par sa densité :

$$m = \rho l L h = 1000\,[\mathrm{kg\,m^{-3}}] \times 100\,[\mathrm{m}] \times 200\,[\mathrm{m}] \times 50\,[\mathrm{m}] = 10^9\,\mathrm{kg}.$$

2. Afin de déterminer la force exercée par l'eau sur le barrage, il faut tout d'abord calculer la pression p dans la retenue d'eau en fonction de la hauteur z. D'après la formule hydrostatique, on a :

$$p(z) = p_{\mathrm{atm}} + \rho g(h - z), \tag{2}$$

où p_{atm} dénote la pression atmosphérique et $z = 0$ correspond au fond de la retenue d'eau. Or, la force exercée sur le barrage par une bande mince de hauteur $\mathrm{d}z$ située à une hauteur z vaut $l\,p(z)\,\mathrm{d}z$. Ainsi, la force F qui s'applique sur le barrage s'obtient en intégrant le profil de pression en fonction de la hauteur :

$$F = \int_0^h l\,p(z)\,\mathrm{d}z = h\,l\left(p_{\mathrm{atm}} + \rho g \frac{h}{2}\right).$$

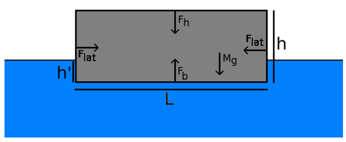
L'application numérique donne une valeur d'environ $1{,}74 \cdot 10^9$ N.

3. On constate que la formule pour calculer la force F ne dépend pas de la longueur L de la retenue d'eau. Ainsi, une retenue de 400 m de long exercera exactement la même force sur le barrage.

Solution de l'exercice 7

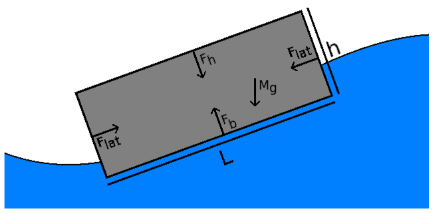
1. Il faut revenir au bilan des forces sur les parois du bateau. On dénotera par h' la hauteur de la partie immergée du bateau.
A l'équilibre, la somme des forces est nulle. En projettant sur l'axe vertical, on obtient ($S := L \times l$) :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \vec{0} \\ \sum \vec{F}_{\uparrow} &= \vec{0} \\ -p_{atm}S + (p_{atm} + \rho_{eau} g h')S - Mg &= 0 \\ \rho_{eau} g h' S - Mg &= 0 \end{aligned}$$

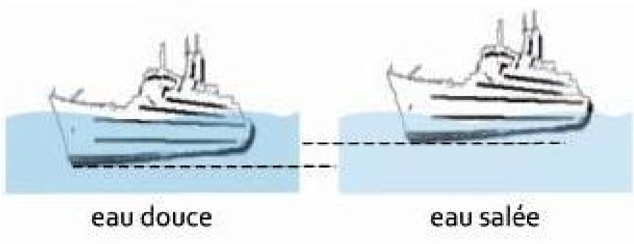


$\Rightarrow$ Mass d'eau déplacée = Masse du bateau

2. Les forces dues à la pression sont perpendiculaire à la coque du bateau, et donc à la surface de l'eau. En présence de vagues, $\vec{F_b}$ n'est plus verticale mais a une composante horizontale qui dépend de l'angle de la vague. C'est cette composante horizontale qui fait avancer un surfeur sur une vague.



3. La salinité de l'eau modifie sa densité. Plus l'eau est salée, plus sa densité est élevée, et par conséquent plus la poussée d'Archimède est forte. Un bateau qui passe d'un point d'eau douce à un point d'eau salée verra ainsi son volume immergé diminuer. Inversement, un bateau entrant dans l'embouchure d'un fleuve verra son tirant d'eau augmenter : c'est un effet important à prendre en compte pour ne pas que le bateau s'échoue !



Solution de l'exercice 8

1. On part de l'équation d'état de Van der Waals pour écrire :

$$p = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{n^2 a}{V^2}$$
$$\frac{pV}{nRT} = \frac{V}{V-nb} - \frac{na}{VRT}$$

en développant le premier terme de droite au premier ordre en 1/V, on obtient :

$$\frac{pV}{nRT} \approx 1 + \frac{nb}{V} - \frac{na}{VRT} \approx 1 + \frac{n}{V}\left(b - \frac{a}{RT}\right)$$

dont le premier ordre s'annule pour : $T = T_M = \frac{a}{bR}$.

2. Le même calcul donne :

$$p = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{n^2 a}{TV^2}$$
$$\frac{pV}{nRT} = \frac{V}{V-nb} - \frac{na}{VRT^2}$$
$$\frac{pV}{nRT} \approx 1 + \frac{nb}{V} - \frac{na}{VRT^2} \approx 1 + \frac{n}{V}\left(b - \frac{a}{RT^2}\right)$$
$$\Rightarrow T_M = \sqrt{\frac{a}{bR}}$$

3. Idem :

$$p = \frac{nRT}{V-nb} e^{-\frac{na}{VRT}}$$
$$\frac{pV}{nRT} = \frac{V}{V-nb} e^{-\frac{na}{VRT}} \approx \left(1 + \frac{nb}{V}\right)\left(1 - \frac{na}{VRT}\right) \approx 1 + \frac{n}{V}\left(b - \frac{a}{RT}\right)$$
$$\Rightarrow T_M = \frac{a}{bR}$$